تلفیق روش‌های جبری و هندسی در ریاضیات مدرسه‌ای

حمیدفضل‌اللهی
دبیر ریاضی شهرکرد و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

مقاله حاضر، گزارش بخشی از تحقیقی است که در آن، ضرورت توجه به طرح و بررسی مسائل هندسی را که حل آن‌ها، مستلزم به‌کارگیری و تلفیق انواع روش‌های متنوع جبری و گاهی روش‌های هندسی از سوی دانش‌آموزان است، مورد بررسی قرار می‌دهد. در حل این نوع مسائل هندسی، نقش جبر و نمادهای جبری و عملیات جبری، بسیار پررنگ است و متنوع‌بودن پاسخ‌ها، جذابیت درس هندسه را که در بین دانش‌آموزان طرفداران کمی دارد، در پی خواهد داشت.

داده‌های این تحقیق، از یک کلاس درس هندسه در پایه‌های هشتم و دهم در یک مدرسه دولتی در یکی از مناطق تهران جمع‌آوری شد. ابزار جمع‌آوری داده‌ها مسائل متنوع تلفیقی محقق ساخته و نیز چند مسئله ازکتاب «خلاقیت ریاضی جورج پولیا» بود. در پی این تحقیق، نتایجی شگفت‌انگیز از داده‌های دانش‌آموزی مشاهده گردیدکه توجه دقیق و موشکافانه به این پاسخ‌ها، می‌تواند در نگاه به درس هندسه و تدریس آن در مدارس، نگرشی تازه ایجادکند. همچنین پرسش‌نامه‌ای بعد از برگزاری کلاس بین دانش‌آموزان توزیع شد تا در تدریس هندسه، میزان علاقه دانش‌آموزان به این نوع مسائل و نوع استقبال آنان از روش‌های متنوع مورد بررسی قرار گیرد. در پایان نیز، از چند معلم هندسه مصاحبه به‌عمل آمد تا نگاه آنان نسبت به این روش، مورد مطالعه واقع شود و از تجربیات عملی آنان در این راستا استفاده گردد. نتایج این تحقیق نشان داد که تمایل دانش‌آموزان به این نوع مسائل در درس هندسه، بسیار زیاد بود و مورد استقبال بی‌نظیر آنان قرار گرفت و بروز تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزی را در پی داشت و باعث گردید دانش‌آموزان منفعل کلاس نیز، به انجام فعالیت و حل این مسئله‌ها، ترغیب شوند.

کلیدواژه‌ها: دوره متوسطه، هندسه، جبر، تلفیق جبر و هندسه

مقدمه

در دهۀ ۱۹۲۰ میلادی، با نام‌های مختلف دروس ترکیبی، دروس عمومی، یا دروس یک‌پارچه، حرکت به‌سوی ریاضی تلفیقی در سال‌های اولیه دبیرستان شدت گرفت. در اثر اصلاحات در دورۀ راهنمایی در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰، مناسب بودن ریاضی تلفیقی برای یادگیرندگان نوجوان، طرفداران بیشتری پیدا کرد. رویکرد تلفیقی به ریاضی به دو مؤلفه در فلسفه آموزش دوره راهنمایی وابسته است که شامل «تدریس بین‌رشته‌ای و یادگیری مشارکتی» است زمانی که به تعریف برنامه‌درسی تلفیقی می‌پردازیم، لازم است به واژگان وابسته به آن مانند تدریس بین رشته‌ای، تدریس موضوعی، آموزش از طریق همیاری نیز، توجه‌کنیم. همچنین آگاهی از تعریف‌های مختلف از برنامه درسی تلفیقی، کمک می‌کند تا از زاویه‌های مختلف، به این موضوع نگریسته شود و جنبه‌های مختلف آن در نظر گرفته شود.

اورت معتقد است که « برنامه درسی تلفیقی، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را با هم ترکیب می‌کند و یک پروژۀ فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجۀ آن، چگونگی برخورد دانش‌آموزان با مسئله شکل می‌گیرد». نکته قابل توجه این است که تقریباً، در همۀ تعریف‌های ارائه شده برای برنامه درسی تلفیقی یا بین رشته‌ای، موارد زیر مشهود است:

- ترکیبی از موضوعات درسی
- تأکید بر انجام پروژه‌ها
- نیازمندی به استفاده از منابعی فراتر از کتاب‌های درسی
- ارتباط بین مفاهیم مختلف یک موضوع درسی.

تفکر جبری در هندسه دبیرستانی

به طریق هندسی و به کمک رابطه‌هایی که بین تصویرهای هندسی وجود دارد، می‌توان عددها و یا رابطه‌های عددی را، به شیوه‌های گوناگون بیان‌کرد. برای مثال، هندسه تحلیلی، وسیله‌ای است سامان یافته که شبیه یک واژه‌نامه دو زبانی، قادر است رابطه را به زبان شکل هندسی و برعکس، ترجمه کند. اندیشۀ هندسه تحلیلی، اساس همه نمودارها، نگاره‌ها، جدول‌ها و غیر آن را، تشکیل می‌دهد. جورج پولیا، در کتاب خلاقیت ریاضی، به معلمان توصیه می‌کند که اگر می‌خواهند به دانش‌آموزان خود واقعاً چیزی یاد دهند، آن‌هم به صورتی ساده و نه پرشتاب، از نکته‌های متفرقِ موجود در برنامه، بپرهیزند. البته وی یادآور می‌شود در ضمنی که نباید به هیچ‌کدام از جنبه‌ها و چشم‌اندازها، بی‌اعتنا بود، اما از تأکید پیش از موقع یا پافشاری بیش از اندازه بر جنبه اصل موضوعی هندسه، پرهیز نمود. پولیا هشدار می‌دهد که باید مراقب بود که دانشمندان و مهندسان آینده، نسبت به هندسه متنفر نشوند، زیرا ممکن است که آن‌ها بیشتر مفتون شکل‌های هندسی یا تجسم فضایی یا کشف‌های استنتاجی و طرح‌ها و نمودارها باشند و همین‌ها، موجب انگیزه‌ای برای تفکرشان شده باشد و پایه‌ای برای استدلال آن‌ها باشد. به عقیده جورج پولیا، استدلال را با شیوه‌های مختلفی می‌توان انجام‌داد، ولی قبل از همه، باید به این نکته توجه‌کرد که یک شیوۀ استدلال که برای سن مفروض یا سطح پیشرفت مفروض مناسب است، ممکن است برای سن یا سطح دیگری، زودرس یا ابتدایی باشد. او همچنین بر استفاده از نمادها و ابزار جبری تأکید می‌کند و بیان می‌دارد که «در استفاده از ابزار، هیچ مفهوم عملی و مشخصی در نظر گرفته نمی‌شود یا به آن توجهی نداریم. در استدلال‌های جبری که پولیا آن را بازی با نمادها نام می‌برد، بازی عبارتست از شرح درستیِ ساختمان دستور یا رابطه جدید (یعنی ترکیبی از نمادها که پاسخ‌گوی قانون به کار برده شده است). گام، وقتی درست برداشته‌شده است که بتوان دستور جدید را، با توجه به بعضی دستورهای اولیه (اصل موضوع‌ها)، یعنی دستورهایی که در گام‌های اولیه به‌دست آمده‌اند و تعریف‌هایی که در همان ابتدا تثبیت شده‌اند، با استفاده از قانون‌های نتیجه‌گیری، به طورکامل و با دقت شرح داد. در این شیوه جبری، «هم اثبات و هم گام‌های رسیدن به اثبات، باید کوتاه و عناصر و متغیرهای تشکیل‌دهنده، باید تا حد امکان کوچک باشند». موضوع مورد بحث در این بررسی، جنبه‌های مشترک بین جبر و هندسه است که در آن، استفاده از مثال‌های عددی هم در حین تدریس و هم در جهت ارزیابی دانش‌آموزان، بسیار حائز اهمیت است. هنگامی می‌توانیم از فهم یک قضیه هندسی یا یک مسئله اثباتی در هندسه اطمینان حاصل‌کنیم که با به‌کار بردن مسائل عینی و واقعی، بتوانیم قدرت دانش‌آموزان را در استفاده از قضایا، محک بزنیم و فهم آن‌ها را در استفاده و کاربست قضایا در مسائل واقعی، مورد ارزیابی قراردهیم.

اورت معتقد است که «برنامه درسی تلفیقی، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را با هم ترکیب می‌کند و یک پروژۀ فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجۀ آن، چگونگی برخورد دانش‌آموزان با مسئله شکل می‌گیرد»

روش تحقیق

در این بخش به اختصـــار، جزئیات مربوط به این تحقیق، توضیح داده می‌شود.

شرکت کنندگان در تحقیق

افراد شرکت کننده در این تحقیق، شامل دو گروه از معلمان و دانش‌آموزان هستند. گروه دانش‌آموزی، متشـــکل از ۸۰ دانش‌آموز پایه‌های هشـــتم، دهم و ســـوم ریاضی هستند. مدرسه مورد نظر، یک مدرسه دولتی در یکی از ناحیه‌های آموزشـــی تهران است و دانش‌آموزان از امکانـــات عادی برخوردارند. علاوه بر این، با ۲۰ نفر از معلمان ریاضی شـــاغل به تدریس در دبیرســـتان که رسمی بودند، مصاحبه شد. از این تعـــداد پنج نفر در هر دو دوره متوســـطه اول و دوم مشـــغول به کار بودند. میزان تحصیلات هفت نفر از آن‌ها، کارشناســـی ارشد و بقیه کارشناسی و اکثریت آنان، درس هندســـه را تدریس کرده بودند. مطالعات مقدماتـــی و مصاحبه‌هایی مقدماتی بـــا آن‌ها انجام گرفـــت تا در جریان کم وکیـــف کار قرار بگیرند و با موضوع پژوهش آشنا شـــوند. تلاش برای مصاحبه با معلمـــان به صورت حضوری، نشـــان داد که به دلیل گرفتـــاری آنان و تنگنـــای زمانی، ترجیـــح بر انجام مصاحبه‌های نیمه ســـاختار یافته بود. درنتیجه، این مصاحبه آماده شـــد و در یکی از روزهای نزدیک به تعطیلات عید نوروز، از معلمان داوطلب درخواســـت شد تا به آن‌ها پاسخ دهند.

ابزار جمع‌آوری داده‌ها

در این تحقیق، ابزارهای متنوعی برای جمع‌آوری داده ها به‌کاربرده شده که شامل پرسشنامه، مصاحبه نیمه ساختار یافته و مشاهده از فرایند حل مسئله‌های تلفیقی هندسه و جبر در کلاس شد. گزارش مشاهدات کلاس درســـی، بیش از پیش مشـــخص کرد که ذهن دانش‌آمـــوزان را نمی‌توان تهی فرض نمود. راه‌حل‌های متنـــوع دانش‌آموزی در رســـیدن به جـــواب، یکی از زیباترین یافته‌های این پژوهش بود.

گزارش مشاهده کلاس درس

هـــدف از مشـــاهده کلاس درس، ثبـــت و ضبط فعالیت‌های فردی و گروهـــی دانش‌آموزان، برای حل مسئله‌های داده شده به آن‌ها بود. تجزیه و تحلیل این داده‌ها کمک کرد تا بتوان برای پرسش‌های زیر پاسخی نسبی به دست آورد.

- حل مسئله‌های تلفیقی در درس هندسه، به فعال شدن کلاس هندسه چه کمکی می‌کند؟
- فعالیت دانش‌آموزان در حل این نوع مسائل، در مقایسه با مسائل اثباتی چگونه است؟
- نحوه مشـــارکت دانش‌آموزان در کلاس هندسه یعنـــی تعامل آن‌ها در حین حل مســـئله‌های تلفیقی هندسه و جبر، چگونه است؟
- آیا راهبردهای مورد استفاده دانش‌آموزان در حل این نوع مسائل، از تنوع لازم برخوردار است؟
- تنوع استفاده از ابزارهای جبری در حل این نوع مسائل، چگونه است؟
- شهود و درک شهودی دانش‌آموزان، چه کمکی به آن‌ها می‌کند تا در مورد صحت جواب، اطمینان لازم را داشته باشند؟

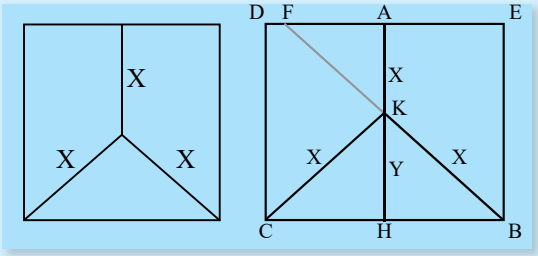
در راستای پاسخگویی به این سؤال‌ها، تلاش شد تا همه فعالیت‌های دانش‌آموزان در کلاس، در نظر گرفته شود تا بتوان به تحقق اهداف زیر، کمک نمود.

- مشاهده فعالیت دانش‌آموزان در حین حل‌مسئله و شنیدن پاسخ آن‌ها؛
- مشاهده استفاده از رویکردهای مختلف حل‌مسئله از سوی دانش‌آموزان؛
- آشنایی با نقاط قوت دانش‌آموزان در حل‌مسئله؛
- آگاهی از قدرت دانش‌آموزان در استفاده از روابط جبری در حل مسئله هندسی؛
- آگاهی از بدفهمی‌ها در جریان حل‌مسئله؛
- مقایســـه فعالیت دانش‌آموزان در کلاس درس هندسه از این نوع، با کلاسی که با روش تعریف، قضیه، مثال ویک‌طرفه، از جانب معلم اداره می‌شود؛
- آشنایی با انواع سلیقه‌های دانش‌آموزان در درس هندسه؛
- مشاهده انواع تکنیک‌های جبری و هندسی در حل‌مسئله و راهبردهای حل‌مسئله.

سؤال‌های مطرح شده در کلاس‌های هشتم و دهم به دانش‌آموزان داده شـــدند و برای آن‌که با روش‌های مطرح شده توسط دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر نیز آشنا شـــویم و تفاوت روش‌ها را در پایه‌های بالاتر مشاهده کنیم، درکلاس ســـوم ریاضی نیز، همین مسئله‌ها به دانش‌آموزان داده شد. یکی از مسئله‌های مطرح‌شده، به این صورت بود:

به عقیده جورج پولیا، استدلال را با شیوه‌های مختلفی می‌توان انجام‌داد، ولی قبل از همه، باید به این نکته توجه‌کرد که یک شیوهٔ استدلال که برای سن مفروض یا سطح پیشرفت مفروض مناسب است، ممکن است برای سن یا سطح دیگری، زودرس یا ابتدایی باشد

مسئله: بـــا توجه به شکل زیر، مقدار x را به‌دست آورید (ضلع مربع ۲ سانتی‌متراست)



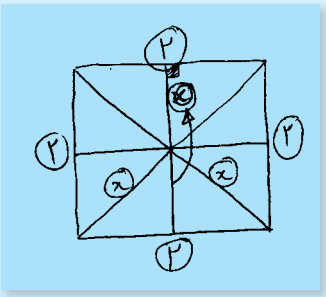
شکل ۱

دانش‌آمـــوزان بـــه گروه‌های کوچک (بـــا انتخاب خودشان)، تقسیم شدند و شروع به مشارکت برای حل این مسئله کردند.[۱]

ســـامیار و پویا : نقطه برخورد (K)، در مرکز مربع قرارداره.

معلم: بچه‌ها! به نظرشـــما، نقطه K، در مرکز مربع قراردارد؟

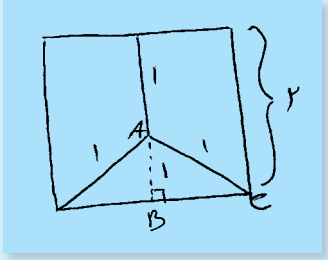
امیرمحمد: بارســـم شکل زیر، اگر این نقطه، وسط مربع باشـــه، در واقع با ادامـــه‌دادن آن‌ها، ما به دو قطر مربع، می‌رســـیم، یعنی این نقطه محل برخورد قطرها خواهدبود و نقطه K، هم از چهار رأس و هم از چهارضلع، به یک فاصله می‌شه که این، امکان‌پذیر نیست. زیرا در هریک از مثلث‌های قائم‌الزاویه، وتر با یکی از اضلاع برابر می‌شه که این، غیرممکنه!



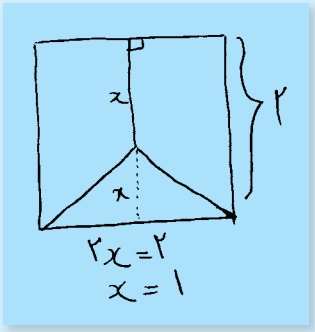
شکل ۲

حسین: $x=1$ (شکل۲).

محمدحسین: $x=1$؟ نه! آقا غلط می‌شه! چون اگه به‌جای x، عدد یک قرار دهیم، اون قسمت پایین هم، برابر یک می‌شـــه، که مثلث‌پایینی، قائم‌الزاویه است، وترش و یک ضلعش برابر به‌دست می‌آید. (شکل۳و۴).



شکل ۳



شکل ۴

ســـینا: اگر AK را امتداد بدیم، ضلع پایینی، نصف می‌شه.

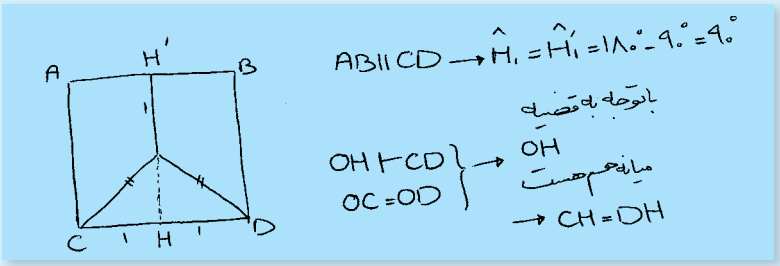
حسین: دلیلش متساوی‌الساقین بودن مثلثِ ارتفاع و میانه در مثلث متساوی‌الساقین یکی‌اَند.

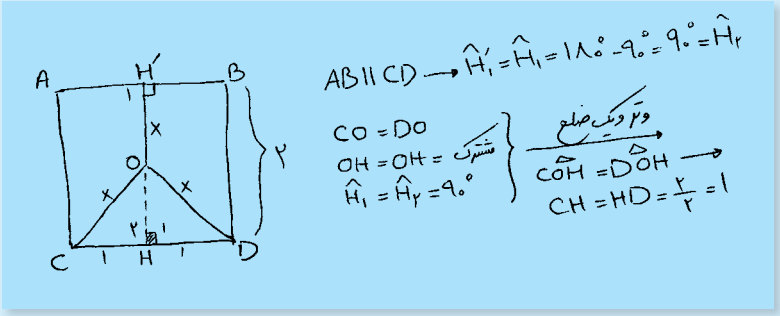
رضا: امتداد AK ، باید عمود برضلع پایینی مربع باشه.

محمد: مـــا باید ثابت‌کنیم که AK، بر ضلع بالایی عمود است و اون رو نصف می‌کنه.

حســـین: چون ضلع‌های مربع موازی‌اند، هرخط عمود بر یکی، بر دیگری نیز، عمود است. (شکل ۵ و ۶)

شکل ۵

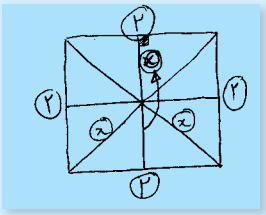




شکل ۶

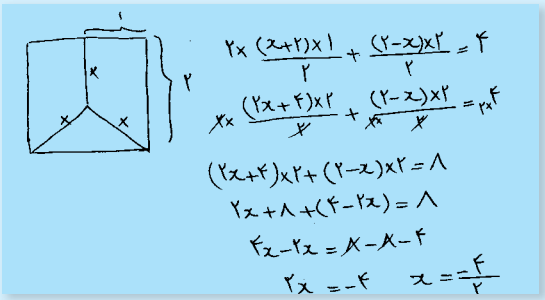
حســـن: با توجه به نامساوی مثلث، مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم، بیشتره. پس: $x>1$ (شکل۷)

علی: اگر K را به D وصل کنیم، پاره‌خط BD قطر خواهد بود.
معلم: مطمئن‌هستین که قُطره؟
علی: باید ثابت‌کنیم KB و KD هم‌خط هستند و این یعنی BD قطره، فکر می‌کنم غلط باشه، چون اگه در شکل بالا، KB را امتداد بدیم، از D نمی‌گذره (شکل ۱۰)
امیرمحمد: اگر نقطه، در مرکز قرار بگیره، به مشکل، برخورد می‌کنه. زیرا امکان نداره که یک نقطه، هم از رأس‌ها و هم از وسط ضلع، به یک فاصله باشه! چون اونوقت مثلث‌های قائمه با دو ضلع برابر داریم! (شکل ۸)
متین: به کمک رسم و اندازه‌گیری، می‌تونیم از وسط ضلع بالایی، خطی عمودکنیم و مقداری به پایین، حرکت‌کنیم و به دو رأس B و C وصل‌کنیم و اندازه‌گیری‌کنیم، تا سه پاره‌خط به‌دست آمده، برابر بشن.
معلم: به چه دلیل از وسط باید شروع‌کنیم؟
رضا: به همون دلیلی که، مثلث پایینی متساوی‌الساقینه.
حسین: به همون دلیل که ثابت‌کردیم دو قطعه روی ضلع پایینی برابر شدند! به همین دلیل، دو قطعه بالایی با هم برابرند .(شکل ۸)

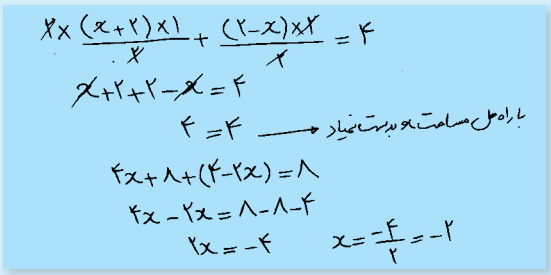


شکل ۸

سامیار: با به‌دست‌آوردن مساحت ذوزنقه‌ها و جمع‌کردنشان، اون‌ها رو برابر مساحت مربع بزرگ قرار می‌دیم. (شکل ۹)



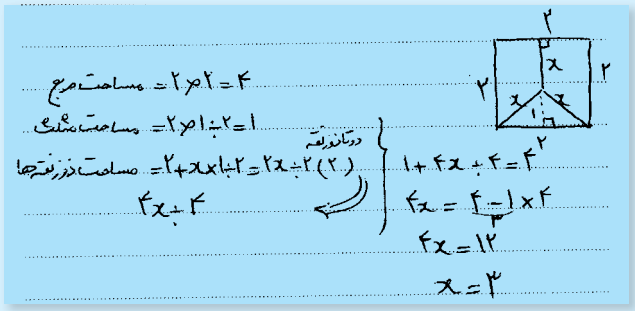
شکل ۹



محمدحسین: x، منفی به‌دست‌آمد. بنابراین، در محاسبات اشتباه‌کردیم. (شکل ۱۰)

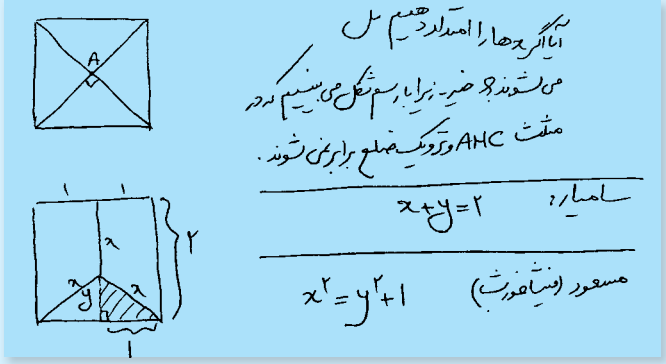
شکل ۱۰

نوید: محاسبات من نشان می‌ده که x=۳ ! این هم با شکل ما جور در نمی‌آید. (شکل ۱۱)



شکل ۱۱

شکل ۱۲



محمدحسین: اصلاً با این روش، قابل‌حل نیست، چون xها از دو طرف ساده می‌شن. (شکل ۹)
این مشاهدات نشان می‌دهد که دانش‌آموزان، با چه علاقه‌ای درگیر حل مسئله شده و تلاش می‌کردند که با استدلال، همدیگر را قانع کنند.

در ادامـــه ایـــن بحث، بعضی دیگر از دانش‌آموزان KH را برابر y در نظرگرفته و رابطه فیثاغورس را نوشـــتند (شکل ۱۲).

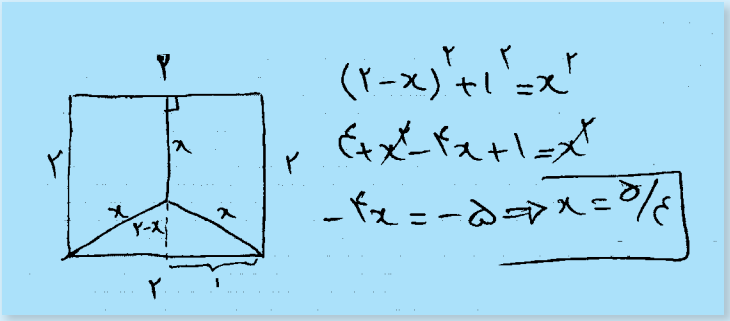
امیرمحمد: دردسر دوتا شد! y را هم باید حساب کنیم! در واقع دو تا مجهول داریم. سطر جدید تقریباً اکثریت دانش‌آموزان، در پیداکردن یک رابطه بین x و y، دچار سردرگمی بودند.

معلم: بچه‌ها! آیا رابطه‌ای بین x و y وجود داره؟ بچه‌ها به شکل دقت کنید!

محسن: جمع x و y، برابر دو می‌شه.

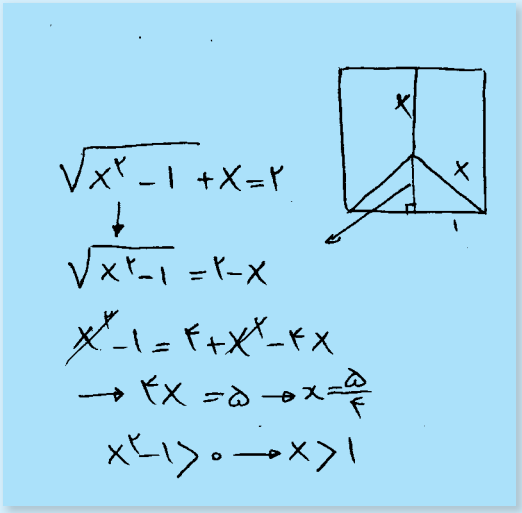
رضا: یعنی می‌شه، y را برحسب x به‌دست‌آورد و در رابطه‌فیثاغورس، قرار داد.

محسن: اتحاد باید بنویسیم! یک معادله به‌دست می‌آید که حل می‌کنیم.

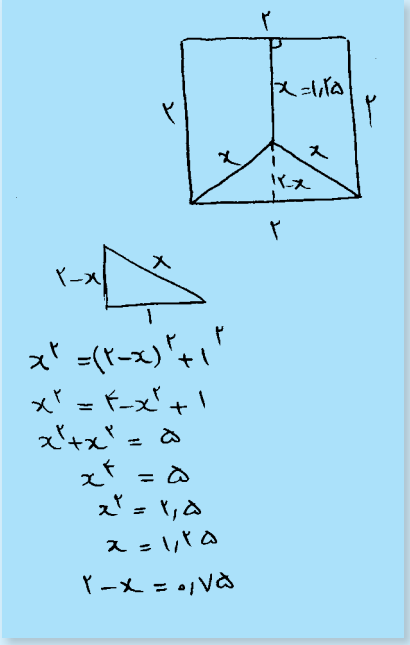


شکل ۱۳

علی: این پرانتز را باید با اتحادها به‌دست آوریم.



شکل ۱۵



شکل ۱۴

یکی از روش‌ها، با وجود این‌که اشتباه به‌کاربرده شد، اما جوابش با جواب اصلی، یکی بود. البته دانش‌آموز مدعی بود که آن روش ایرادی ندارد و راه‌حل وی درست است. با بحث فراوان، او قانع شد که مسئله را با داده‌های دیگری حل کند تا درســـتی یا نادرســـتی ادعایش را نشـــان دهد. برای این کار به او گفتیم که «مثلاً ضلع مربع را برابر ۴ سانتی‌متر در نظر بگیر! آیا باز هم جواب درست است؟». دانش‌آموز جواب داد که «مهم جواب نهایی است که درست شده و هیچ ایرادی ندارد! اگر گزینه بدهید، یعنی اگر سؤال تستی باشد، پاسخ درست است! شما اصلاً فکر کنید همه مراحل غلطاند، مهم جواب است». (شکل ۱۴).

پافشاری این دانش‌آموز بر «جواب آخر» یعنی همان چیزی که تست‌ها به آن‌ها منجر می‌شوند بسیار قابل تأمل بود.

در حین حل مسئله، هر مشـــاهده کلاس درس، در نوع خود جالب و نیازمند تجزیه و تحلیل بود. مثلاً بعضی از دانش‌آموزان در حال تفکر بر روی حل مسئله، مدت‌ها به ســـؤال چشم می‌دوختند. اما مجید یکی از کســـانی بود که حوصله وقت گذاشـــتن نداشت. به او گفتم «به کجا رسیدی؟» پاسخ داد که «آخرش، جواب مسئله چه عددیه؟ چرا یه جواب به مسئله نمی‌دین تا ما رو راحت کنین؟ از این همه بحث خسته شدم، از این بحث‌ها خســـته شدیم!». این حرف، او قصد به‌هم زدن نظم و فرار از بحث را داشت که متأسفانه طرفداری پیدا نکرد. و دوباره به تفکر ادامه داد.

موقع مطرح‌کردن این مسئله در کلاس سوم ریاضی نیز، تقریباً نتایج مشابهی به‌دست آمد، برای مثال، یکی از دانش‌آموزان،روش جالب زیر را ارائه داد.

«y میشه رادیکال $\sqrt{1-x^2}$ ، AK+KH برابر ضلع مربع می‌شـــه که ۲ اســـت. یک معادله می‌شه، معادله رادیکالـــی! رادیکال را یک طـــرف و بقیه رو اون طرف و به توان دو می‌رســـانیم، شرط جواب معادله اینه که زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مســـاوی صفر باشه. پس یک معادله به‌دست می‌آد که نتیجه می‌گیریم $x^2>1$ و این هم نتیجه می‌دهد که حتما $x>1$ ». (شکل ۱۵)

با بررسی و حل این سؤال در کلاس درس، بیش از پیش این نتیجه به‌دست‌آمد که، ذهن دانش‌آموزان را نمی‌توان پوچ و تهی در نظرگرفت و شهود دانش‌آموزان را به‌عنوان یک نکته مهم در هندسه، باید مورد اهمیت قرار داد.

علاوه بر این‌ها، استفاده دانش‌آموزان از روش‌های اندازه‌گیری بسیار دیدنی بود و در آن‌ها، تنوع روش‌های جبری به وضوح قابل مشـــاهده بود. کاربرد روش‌های متنوع جبری برای حل یک مســـئله هندسی و بحث پیرامـــون جـــواب معادله جبری و اشـــتباهاتی که در مســـیر حل آن بوجـــود می‌آمد، دائم دیده می‌شـــد و همه برای رسیدن به جواب، تلاش می‌کردند، تعدادی از دانش‌آموزان بدون داشـــتن دلیل هندسی، از شهود خود استفاده کرده و نتیجه می‌گرفتند مثلاً برای اینکه ثابت‌کنند نقطه H، نقطه وســـط است، بیان می‌کردند که «طبق شکل و چیزی که مشاهده می‌کنیم، نقطه، وسط است» و بعد، محاسبات جبری را شروع می‌کردند. امـــا تعدادی از آن‌ها تا دلیل درســـتی مطلبی را اثبات نمی‌کردند و برایشان مشخص نمی‌شد که چرا آن نقطه وسط است، به مرحله محاسبات وارد نمی‌شدند. در واقع، این دســـته از دانش‌آموزان دید اثباتی قوی داشتند. در حالی که بعضی دیگر، با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری، وارد حل مســـئله می‌شـــدند و دقتی در محاســـبات نمی‌کردند. البته با استفاده از روش اندازه‌گیری عده‌ای از آنان، تقریب خیلی‌خوبی از جواب مسئله دادند.

افزون بـــر این‌ها، بی‌دقتی در محاســـبات جبری و رسم، اشـــتباه اکثریت بود - چه اشتباهات سطحی و چـــه عمیق- در یک نـــگاه، دانش‌آموزان در حل این مسئله، با کاربرد عملی بسیاری از قضایای هندسی و نیز روش‌های جبری، آشنا شدند که از آن جمله، موارد زیر چشمگیر بودند.

- استفاده از قضیه حمار برای تعیین محدوده x؛
- خواص مثلث متساوی‌الســـاقین (منطبق بودن ارتفاع و میانه)؛
- حل معادلات رادیکالی و شرط جواب و نامعادله طلایی؛
- کاربرد اتحادها و روابط جبری؛
- شـــرط هم‌خط‌بودن دوپاره‌خـــط و به کاربردن برهان خلف؛
- حل معادله درجه اول؛
- کم‌کردن تعداد متغیرها؛
- استفاده از شهود در هندسه؛
- اســـتفاده از برابری مجموع مساحت ذوزنقه‌ها و مثلث، با مساحت مربع؛
- اندازه‌گیری فاصله نقطـــه K تا نقطهٔ A وتغییر دادن موضع نقطه K تا رســـیدن به فاصله‌های برابر تا نقاط B و C؛
- اســـتفاده از تشـــابه دو مثلث و حل معادله‌های کسری برای یافتن جواب.

جمع‌بندی

با توجه به مسئله‌های مطرح‌شده در کلاس درس و تجزیه و تحلیل مشاهدات، مهم‌ترین نتایجی که به‌دست آمد، از این قرار بود.

- تمرکز بیشتر دانش‌آموزان بر روی محدوده جواب، یعنی دامنه جواب، جای تأمل داشت.
- تعداد اندکی از دانش‌آموزان، بر استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری برای به‌دست آوردن جواب اشاره داشتند.
- بسیاری از دانش‌آموزان، به شرایط هندسی مستتر در مسئله که بیان نشده بود و لازم بود، توجه نموده و آن را در نظر گرفتند، البته تعدادی از دانش‌آموزان هم

هندسه، هنگامی به یک درس جذاب تبدیل می‌شود که حل مسئله در آن احیا شود و دانش‌آموزان با مسائلی جذاب روبرو شوند و بتوانند تکنیک‌های خاص خودشان را در مسئله پیاده کنند. لازمهٔ این کار، تأکید بر تنوع تکنیک‌ها از سوی معلم و برنامه و کتاب است

آن شـــرایط را بدون اثبات، مفروض در نظر گرفتند و تعدادی بدون اثبات، آن‌ها را نمی‌پذیرفتند و با این مورد مشکل داشتند.

- بر اثر مقایسه جواب به‌دست آمده با شکل مسئله، گاهی اوقات دانش‌آموزان جوابی را به‌دست می‌آوردند، اما به دلیل اینکه با شـــکل و شرایط مسئله سازگاری نداشـــت، آن را نمی‌پذیرفتنـــد. یعنی شـــهود و درک شهودی هندسی آن‌ها، کمک می‌کرد تا جوابی را بدون حس شهودی، قبول نکنند.

- استناد دانش‌آموزان به قضیه‌های هندسی مهم در جریان حل مســـئله‌ها، بسیار زیبا بود مانند خواص مثلث متساوی‌الساقین، قضیه فیثاغورس، خواص عمود منصف و نظایر آن، استفاده از ابزارهای جبری متفاوت و تنوع روش‌ها.

همه این نتایج نشان داد که لازم است برای تبدیل یک مســـئله هندســـی به یک مســـئله جبری، موارد بیشـــتری در نظر گرفته شود. مثلاً معرفی متغیرها در یک مســـئله هندسی و کشف رابطه بین آن متغیرها و بعد، تبدیل آن‌ها به یک معادله یا دســـتگاه جبری، از مهم‌ترین نکات حل مســـائل تلفیقی هندسی- جبری بود. تبدیل یک مســـئله هندسی به یک معادله جبری در واقع، تبحر در اســـتفاده از قضایای هندسی است و حل معادله یا دستگاه نیز یک کار جبری است. تجزیه و تحلیل مشـــاهدات حاکی از آن است که در قسمت هندســـی، تقریباً اکثر دانش‌آموزان، می‌دانستند که از کدام قضیه هندسی استفاده کنند، اما در قسمت جبری و حل معادلات و دســـتگاه‌ها، دچار سردرگمی بودند. رســـم شکل دقیق هندسی نیز، یکی از مواردی بود که دانش‌آموزان بر آن تأکید داشـــتند و معتقد بودند که، رسم نادرست شکل، می‌تواند آن‌ها را به اشتباه بیاندازد (مانند نقطه تقاطع در مســـئله، که به سبب نوع رسم شکل، بعضی از دانش‌آموزان آن را، نقطه وسط در نظر گرفتند.)

قســـمت اصلی و مهـــم این تحقیق، مشـــارکت حداکثری دانش‌آموزان در جریان حل‌مســـئله و ارائه راه‌حل‌های متنـــوع دانش‌آموزی از ســـوی آن‌ها بود. ایـــن یافته نشـــان داد که بهترین راه مشـــارکت همه دانش‌آموزان در کلاس و مشـــاهده و بروز خلاقیت در آن‌ها، به‌کاربردن روش‌های فعال در کلاس و در جریان تدریس و تأکید بر حل مسئله، به‌عنوان یک ابزار مهم در آموزش هندسه است.

سخن پایانی

آموزش هندســـه و ایجـــاد جذابیـــت و علاقه در دانش‌آموزان نســـبت بـــه ایـــن درس، از دغدغه‌های بیشتر معلمان ریاضی است. در این تحقیق، به اهمیت طرح ســـؤال‌های تلفیقی در دوشـــاخه جبر و هندسه اشاره شد. این تحقیق نشـــان داد که دانش‌آموزان، تا چه اندازه علاقه‌مند به بحث بر روی این نوع مســـائل و مشـــارکت کردن در جریان حل آن‌ها در یک کلاس فعال هستند. همچنین تنوع ابزارهایی که دانش‌آموزان برای پاســـخگویی به این نوع ســـؤال‌ها داشتند، بسیار زیاد و پرمحتوا بود. پی‌بردن دانش‌آموزان به اشتباهات ســـایر دوســـتان و مباحثه بین آن‌ها و مشخص‌شدن بعضی از بدفهمی‌ها در درس هندســـه، از مزیت طرح این مســـئله‌ها و بحث بر روی آن‌ها بود. کاربرد عینی بسیاری از قضیه‌های هندسی، برای دانش‌آموزان بهتر مشخص می‌شد. مهم‌ترین قسمت تحقیق، این بود که دانش‌آموزان احساس کردند که در ساختن دانش خود سهیم‌اند و معلم بیشتر نقش راهبری را بر عهده دارد. مصاحبه با معلمان نیز تأییدکننده این مطلب بود که هندســـه، هنگامی به یک درس جذاب تبدیل می‌شود که حل مسئله درآن احیا شود و دانش‌آموزان با مسائلی جذاب روبرو شوند و بتوانند تکنیک‌های خاص خودشان را در مســـئله پیاده کنند. لازمهٔ این کار،تأکید بر تنوع تکنیک‌ها از سوی معلم و برنامه و کتاب است.

پی‌نوشت

۱. نام‌ها مستعار هستند.

منابع

۱.ظهوری زنگنه، بیژن و گویا، زهـــرا. (۱۳۸۱). دیدگاه‌های نوین هندسه. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره ۶۷. دفتر انتشارات کمک آموزشی، ســـازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲. رفیع‌پور، ابوالفضل و گویـــا، زهرا. (۱۳۸۶). چرایی و چگونگی آموزش هندسه. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره ۹۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. رفیع‌پـــور، ابوالفضل. (۱۳۹۴). برنامه درســـی جبر، **دانشنامه ایرانی برنامه درسی**.

۴.محمدی، ژالـــه و گویا، زهرا. (۱۳۸۸). بررســـی دانش معلمان ریاضی دوره راهنمایی. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره۹۵. دفتر انتشـــارات کمک آموزشی، ســـازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۵.جورج پولیا، **خلاقیت ریاضی**، ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.